《自然科学史研究》 第 11 卷 第 4 期（1992 年）：325—332
Studies in the History of Natural Sciences Vol. 11 No. 4 (1992)

"三分损益"法的起源*

戴 念 祖
（中国科学院自然科学史研究所，北京 100010）

内 容 提 要

"三分损益"的乐律计算方法首见《管子·地员》记载。据此，人们通常将中国律学的起源定在公元前 3 至 4 世纪左右，甚至更晚。但据近年中国出土的音乐文物及其测音，"三分损益"法的起源可大大地提前：公元前第60世纪舞阳贾湖村人发明的竖吹骨笛已有六声或七声音阶；至迟在公元前 11 世纪已有十二律与七声音阶；侯马编钟的测音表明，从数学上以三分损益完成五声音阶的计算至迟在春秋中叶（约公元前 572—前 542 年）或管子生活的年代（？—公元前 645 年）。

关键词： 三分损益，起源

在中国古代典籍中，最早记述三分损益法的是《管子·地员》。以三分损益法对十二律作出完整计算的文字记载见之于《吕氏春秋·季夏纪·音律》。根据它们的成书时间①，在很长的时间里人们将中国的三分损益法的起源定在战国时期②。近年来，不少人对此提出怀疑③。深入地探讨中国三分损益法的起源，也有助于了解东西方早期的乐律传播方向等问题④。

近几十年，考古界发现了大量的先秦时期的音乐文物，音乐界对此作了普查和测音。他们的工作为讨论中国乐律的起源问题提供了可靠依据。

在浙江余姚河姆渡遗址发现了上百支用鸟禽肢骨做成的骨笛，它们是公元前 5000 年

1992 年 3 月10日收到修改稿。
* 笔者与音乐研究所黄翔鹏教授就本题有过多次讨论，本文吸收了他的诸多见解，特此申明并致谢。

① 《管子·地员》的成书时间曾被认为属秦汉时期。50 年代夏纬英从农学和植物学考证中断其为战国时期。参见夏纬瑛：《论地员篇的著作年代》，载《管子地员篇校释》，农业出版社，1981 年，第 94—99 页。

② 法国汉学家沙畹（E. Chavannes, 1865—1918）在上世纪末曾说："没有任何原始文献表明中国的乐律会早于公元前三世纪或四世纪"。此说在西方影响甚久。见 E. Chavannes, *Les Mémoires Historiques de Se Ma Ts'ien*, vol. 3, pp. 638, 644, Leroux, Paris, 1898。

③ 杨荫浏：《中国古代音乐史稿》，上册，人民音乐出版社，1981 年，第 86 页（也见该书 1964 年版）；刘复曾经说："我们不能因为《管》、《吕》两书之后于毕（达哥拉斯）氏，就说三分损益法也后于毕氏。亦许《管》、《吕》两书之前，已经有过这样的学说，只因未见记载，或虽有记载而其书已亡，或尚未发现，所以我们提不出积极的证据来"。见刘复：《从五音六律说到三百六十律》，《辅仁学志》，第 2 卷第 2 期（1930 年），第 52 页，刘复的文字甚有代表性。

④ Joseph Needham, *Science and Civilisation in China*, vol. 4, part I, pp. 176—183, Cambridge, 1962. 李约瑟在此以乐律的起源时间确定东西方音乐文化的传播方向，判定中国的乐律晚于古希腊和古巴比伦，主张中国的乐律起源于巴比伦。

的文化遗物,有的至今仍可吹出简单的音调①。在河南舞阳贾湖村发现了16支骨笛，是公元前6000年的文化遗物②。贾湖骨笛的发现令人惊讶不已。

贾湖骨笛制作精美,形状固定。骨笛一端为吹口,另一端开口,上有7孔,是一种竖吹管乐器。某些骨笛的音孔旁还残留当年钻孔前刻划的符号;个别音孔,或许由于一时钻孔不准确,在其旁边钻另一小孔。经过对其中一支保存最完整、无裂纹的骨笛进行测音，其全长、各音孔之距离及音高如图1所示。该笛全长22.20厘米。测音时所用仪器的参考音高为 A_4(440赫兹),即相当于 $c^1 = 261.63$ 赫兹。设 c^1 为相对音高，并取其音分值为0,其中之一的测音结果③则为：音孔全闭即筒音音高为 $^{\#}f^2 + 44$，即1844音分;第5孔音高为 $c^3 + 24$，即2424音分；第2孔音高为 $g^3 - 40$，即3060音分；第1孔音高为 $^{\#}a^3 - 42$，即3358音分。由此可推知，1、2两孔的音程为298音分，比五度律小三度(294音分）大4音分；2、5两孔的音程为636音分，比五度律增四度（612音分)大24音分,不超过一个最大音差;第2孔与筒音音程为1216音分,与八度音程近似。由此测音结果可判断该笛为筒音角音的清商六声音阶，其六声为角、徵、羽、闰、宫、商，相当于mi、sol、la、^{b}si、do、re；或者是筒音宫音的下徵调七声音阶，其七声为宫、商、角、和、徵、羽、变宫,相当于 do、re、mi、fa、sol、la、si。这一考古发现证明,在公元前第60世纪，中国人的音乐生活中已有七声音阶，而且其音阶形式，即下徵调音阶正是后来成为中国传统的音阶。

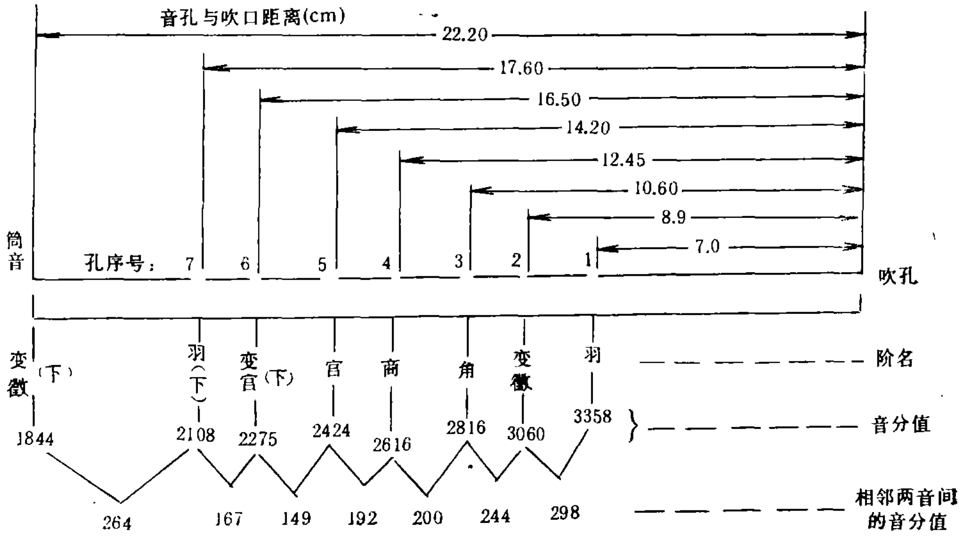


图1 贾湖骨笛的孔距与音高

贾湖遗址处于淮河上游的冲积平原,当时在这里有一个经济、文化相对发达的人类群体。他们以农业为主,兼捕捞和狩猎,还有处于萌芽中的文字。他们可能是古史传说中东

---

① «河姆渡遗址第一期发掘报告»,«考古学报», 1978年第1、2期;«浙江河姆渡遗址第二期发掘的主要收获»,«文物», 1980年第5期,第1—15页。

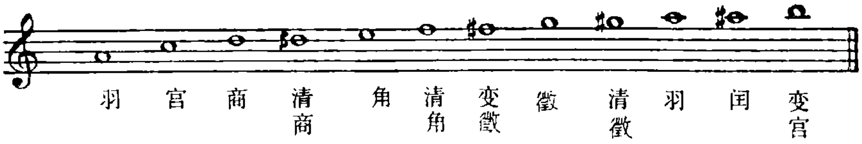
② «河南舞阳贾湖新石器时代遗址第二至六次发掘简报»,«文物», 1989年第1期,第1—14页。

③ 黄翔鹏:«舞阳贾湖骨笛的测音研究»,«文物», 1989年第1期,第15—17页。

夷集团的太昊氏部落①。可见,贾湖骨笛的产生是有一定的社会背景的。不过,贾湖古代人如何确定骨笛七个音孔的距离?他们是否运用了某种数学方法?这些问题尚待研究。笔者倾向于他们是根据经验,即以许多骨管尝试之后得到的。我们暂且将贾湖骨笛看作上古代人智慧爆发的产物。在科学史上追寻中国古代音程和音阶概念的起源时,它无疑是有力的历史佐证。从贾湖骨笛发明时起至春秋时代,中国古代人创造了许多种类不同的乐器。让我们再从其他古乐器遗物上探寻中国律学的起源。由于竹、木制乐器及弦线在地下容易腐烂,只有陶制的埙、石制的磬、青铜制的钟,还能为我们提供确凿证据。

埙是原始社会吹奏乐器之一。河姆渡遗址的陶埙,只有一个吹孔,别无音孔,是目前所知最早的埙。西安半坡遗址的埙,有一个音孔,开闭该音孔,可产生小三度的二个音。在对后来的埙、磬、钟的测音表明,小三度在商、周乐器中普遍存在。夏代和商初,陶埙发展到三音孔,由三声音列发展到四声、五声。甘肃玉门火烧沟文化遗址的陶埙,约为新石器时代晚期或夏代遗物,共 20 余件,为彩陶制品,有 9 件保存完好。它的两肩各一音孔,腹部左下侧一音孔,以开闭不同音孔可发 4 个乐音,构成四声音列,为宫、角、徵、羽的音阶结构②。

产生绝对音高的证明,见之于山西夏县③和襄汾陶寺④两地出土的夏代石磬、河南出土的商代虎纹大石磬⑤,对它们的测音均在 $^{\#}c^{1}$ 左右,振动频率约为 280 赫兹。这说明,夏、商人已有绝对音高的观念。河南辉县琉璃阁出土殷墓五音孔陶埙 2 个,呈平底卵形,每个陶埙都能吹出11个高度不同的音。而且,两个陶埙发音一致,半音与绝对音高或标准音高的观念已经相当明确了⑥。安阳小屯殷墓出土武丁时(约公元前 1240—前 1180 年)五音孔陶埙尤其值得我们注意。对它的测音⑦结果见谱 1。由琉璃阁和小屯两地出土的殷代五音孔陶埙的发音看,在殷商中期(公元前 13—前12 世纪)达到音列完备、完整的七声音阶,并在 11 个音之间构成半音关系,只差一个音就有完整的“十二律”了。



谱 1 安阳小屯殷埙测音结果

司马迁在《史记》中写道:“武王伐纣,吹律听声”⑧。公元前 521 年,周景王的乐官伶

---

① 张居中:«试论贾湖类型的特征及与周围文化的关系»,«文物», 1989 年第 1 期,第 13—20 页。
② 刘东升等编:«中国音乐史图鉴»,人民音乐出版社, 1988 年,第 11—12 页。
③ «山西夏县东下冯遗址东区、中区发掘简报»,«考古», 1980 年第 2 期,第 97—107 页。
④ «1978—1980年山西襄汾陶寺墓地发掘简报»,«考古», 1983 年第 1 期,第 30—42 页。
⑤ 李纯一:«中国古代音乐史稿»(第一分册,增订版),人民音乐出版社, 1984 年,第 40 页。
⑥ 同⑤,第 44—45 页。
⑦ 黄翔鹏:«新石器和青铜时代的已知音响资料与我国音阶发展史问题»,«音乐论丛»,第 1 辑(1978 年),人民音乐出版社, 1978 年,第 195—196 页。
⑧ «史记»卷二十五«律书»,中华书局校点本,第四册,第 1240 页。

州鸠认为,十二律七声的出现与武王伐纣(约公元前 1066 年)的时间有关联①。已故音乐史家杨荫浏(1899—1984 年)也曾作出类似的大胆论断②。对上述陶埙的测音表明,这些看法确有根据。很可能,武王伐纣的时间,即公元前 11 世纪中叶,是中国古代人发现并使用十二律七声音阶的下限。

编钟在殷商、西周时期,大多为 3 件一组。它们的音程与音阶形式与同时期陶埙有许多相同之处。例如,殷钟、周编钟的音列基本上符合自然泛音列,含小三度音程,具有宫、角、徵、羽的音阶结构,尤其是西周中晚期的编钟已出现 8 件一组,它们的中鼓音与侧鼓音的音程已统一倾向纯律小三度。

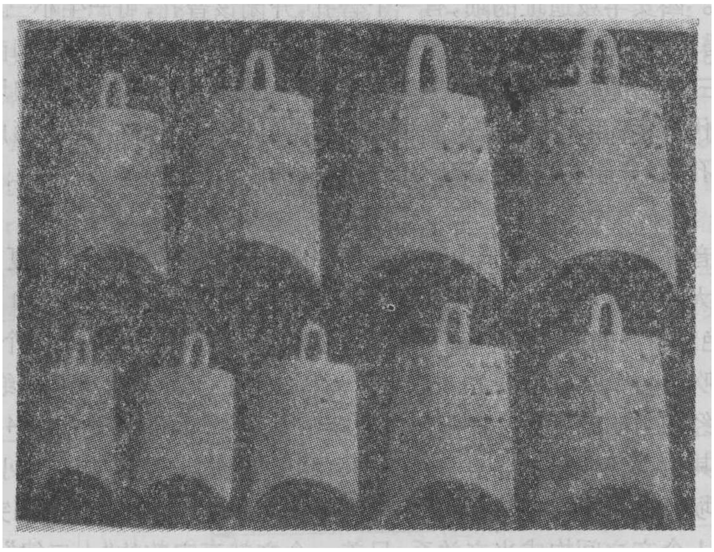


图 2 侯马编钟

春秋时期,编钟制造技术大为提高,出现了 9 件、十几件、甚至几十件一套的编钟。山西侯马出土的晋国编钟(图 2) 9 件,是春秋中叶的文化遗物,至迟也是在约公元前 572 年到公元前 542 年间制成的③。从其测音结果(见谱 2),发现该编钟以基音 g^1(402.32 赫兹)为标准,成六声音阶。其音阶系列中的前 5 个音 g^2、a^2、c^3、d^3、e^3 刚好是《管子·地员》

表 1 《管子》记载的五声及弦长

阶 名	徵	羽	宫	商	角
相当今日音名	g	a	c^1	d^1	e^1
弦 长	106	96	81	72	64
与主音的长度比	1	8/9	3/4	2/3	16/27

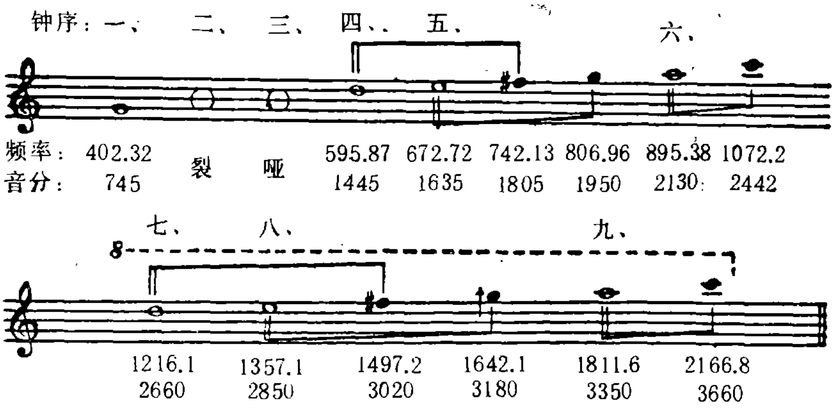
① 《国语》卷三《周语下》"周景王问钟律于伶州鸠",上海古籍出版社,1988 年,上册,第 138 页。
② 杨荫浏:《中国古代音乐史稿》上册,音乐出版社,1964 年版(也见该书 1981 年版),第 42 页。
③ 《山西侯马上马村东周墓葬》,《考古》,1963 年第 5 期,第 242、245 页。张颔、张可钟:《庚儿鼎解》,《考古》,1963年第 5 期,第 270—272 页。据考,侯马遗址为公元前 585 年到公元前 403 年间的晋国国都新田遗址,见顾铁符:《侯马遗址是晋都新田说的提出》,《文物》,1991 年第 7 期,第 65—67 页。

所记述的"徵、羽、宫、商、角"五声①，其五声及弦长如表 1 示。弦的长度与其频率成倒数关系。令徵羽弦长的发音频率为 806.96 赫兹，由各音与主音的长度比即可得出各音的频率值。为了比较，将侯马钟的五音与《管子・地员》的测量结果列于表 2。

表 2 侯马编钟的实测与《管子》计算比较

五声序列	g^2	a^2	c^3	d^3	e^3
侯马钟的实际音响 (Hz)	806.96	895.38	1072.2	1216.1	1357.1
按《管子・地员》的计算结果 (Hz)	806.96	907.83	1075.9	1210.4	1361.7
侯马钟与《地员》之间的音分差 (Hz)	0	−24	−6	+8	−6

由表 2 可见，频差甚小，最大绝对差为 24 赫兹。因而可推断，侯马钟是以《管子・地员》所记述的三分损益法调音的。管仲(?—公元前645 年)是春秋初期人，《管子・地员》被认为是战国时期的作品。虽然人们曾将中国三分损益律及其方法定为战国时期的科学成果，但从侯马钟的测音看，至迟春秋中叶，人们已经懂得了《管子・地员》所载的三分损益法；《管子・地员》的音律计算方法原本是春秋中叶、甚而是春秋初期已有的科学内容。在此要指出的是，《管子・地员》并非是古代人研究音律计算问题的专作，而是有关土壤与植物关系的文章。该文作者借用"三分损益"比喻地下泉水距地面的深度与地面植物的分布的关系。照惯例，人们总是以一种熟悉的事物比喻另一种生疏的或未被人们理解的事物。由此看来，在《管子・地员》的写作年代，人们对三分损益法是很熟悉的了。这其间，三分损益法已有几百年的历史，当无疑义。



谱 2 侯马钟的测音结果(谱中符号┌─┐表示同属一钟的中鼓音与侧鼓音)

比侯马钟晚约百年的大型编钟列曾侯乙钟为楚惠王五十六年（公元前 433 年）所作，共65件。其上铭文共 2800 字，有律名 29 个，阶名和变化音名 37 个。实测音响与铭文相符。音域从 A_1 至 c^4，达 5 个八度以上。在约占 3 个八度音程的中部区域，十二个半音具

① 黄翔鹏：《新石器和青铜时代的已知音响资料与我国音阶发展史问题》，《音乐论丛》第 3 辑，1980 年，人民音乐出版社，第 141—145 页。

全，可以旋宫转调，并演奏五声、六声或七声的乐曲。其铭文中已有表示乐律的专门术语。除律名外，以“清”、“浊”二字表示一律之差；以前缀词“太”、“少”或后缀词“反”表示除正声组外的八度组位置；表示高低八度位置的前缀“珈”、“濬”（qiǎn）等字；表示一个古代音差的后缀“𠨖”（yòu）字；表明上下大三度关系的后缀“角”、“䶵”、“曾”字；表示生律法上下相生之意的“下”字，等等。这些铭文从一个侧面反映了春秋战国之际我国乐律学与声学的高度发达。如果此时的中国人还不懂得音调的数学规律，那么，曾侯乙编钟的调音几乎是不可能的①。

当我们谈论以上种种出土实物时，有人会问：这期间有否文字记载表明中国古代三分损益法的诞生？有否音高标准器、特别是弦线式标准器以供完成最恰当的音律实验之用？答案是肯定的。

据《国语·周语》记载，周景王二十三年(公元前 522 年)周景王曾问律于伶州鸠。伶州鸠不仅将十二律名称道明于周景王，而且还说：“律，所以立均出度也。古之神瞽考中声而量之以制，度律均钟，百官轨仪。纪之以三，平之以六，成于十二，天之道也。”②引文中的“均”读 yūn，不读 jūn。三国时吴国韦昭（公元 204—273 年）对此注解说：“均者，均钟木，长七尺，有弦系之，以均钟者，度钟大小清浊也。汉大予乐官有之。”可见，伶州鸠所说的“均”是一种弦线式音高标准器。它是古代盲人音乐家创制的说法，当然不可全信。韦昭说它用以“度钟大小清浊”，称之为“均钟木”，也即是用以调律、定律、作律学实验用的器具。伶州鸠所说的“立均出度”、“度律均钟”也是这个意思。据韦昭所说，它还保存于汉代宫庭中。黄翔鹏先生曾经考证，曾侯乙墓出土的五弦器就是这种“均钟木”③。在此还应注意，“律，所以立均出度”一句表明，先秦时期“律”的含义之一并非管，而是弦线！以为“律”即“声之管”的见解是属于汉代人的④。

被伶州鸠称之为自然法则(“天之道也”)的“纪之以三，平之以六，成以十二”是什么意思呢？在中国典籍中，大概这是最早相连述及“三”、“六”、“十二”这 3 个数字的文字。汉代以来，经学家们虽然将“六”释为“六律”或“阳律”，将“十二”释为“十二律”，但是，“三”这一数字一直被误解为“天、地、人”，韦昭也不例外。事实上，关于“三、六、十二” 3 个数字的整句话是与十二律的名称、音高标准器“均”的叙述同时出现的，可见它们应是与乐律学相关的东西。吉联抗将它们大胆地译为：“用三分来计算，用六律来平准，完成于十二律”⑤。吉联抗先生推翻了从汉以来 2000 年的文字案，笔者极为赞赏他的观点。“纪之以三”，实

① 关于曾侯乙钟及其音律问题，可参阅：《湖北随县曾侯乙墓发掘简报》；裘锡圭：《谈谈随县曾侯乙墓的文字资料》；黄翔鹏：《先秦音乐文化的光辉创造——曾侯乙墓的古乐器》。以上 3 文同载于《文物》，1979 年第 7 期，第 1—39 页。《音乐研究》1981 年第 1 期为随县出土音乐文物专辑，上载 8 篇文章，涉及曾侯乙钟铭文、释文、乐学体系、音律等内容。在国外，也有不少关于曾侯乙钟的研究论文发表，如程贞一教授(Cheng-Yih Chen)的《公元前 5 世纪中国青铜编钟的半音音阶的产生》（The Generation of Chromatic Scales in the Chinese Bronze Set-Bells of the —5th Century），文载 *Science and Technology in Chinese Civilization*, (World Scientific Pub. Co., Singapore, 1986, pp.155—197)。本文中所述及的个别铭文字义存有不同看法，如潘建明：《曾侯乙编钟的音律研究》，《上海博物馆集刊》，上海古籍出版社，1982 年，第 93—115 页。本文采用黄翔鹏的观点。

② 《国语》卷三《周语下》，上海古籍出版社，1988 年，上册，第 132 页。

③ 黄翔鹏：《均钟考——曾侯乙墓五弦器研究》，《黄钟》，1989 年，第 1 期，第 38—50 页；第 2 期，第 83—93 页。

④ 蔡邕《月令章句》：“律，率也，声之管也。”，《后汉书·律历志》注文，中华书局校点本，第 11 册。

⑤ 吉联抗辑译：《春秋战国音乐史料》，上海文艺出版社，1980 年，第 47—48 页。

际上就是将均钟木的弦线分为 3 等分，以此计算或确定音调高低的方法。它和"天、地、人"毫不相干。我们现在将三分损益法有时简称为"三分法"或"三份法"（3-sections），它与"纪之以三"的意义完全相同。由此可见，就文字记载看，三分损益法至迟在公元前 6 世纪下半叶已有端倪。

昭公二十年(公元前 522 年),《左传》述及"和五声"时，将"五声、六律、七音"与弦线的"清浊、大小、短长"相联系①。它恰好反映了在均钟木上进行律学实验的定性总结。通过实验，由弦线的大小、短长及其发音的清浊而确立五声音阶、七声音阶和十二律之间的音程规律，并总结其间的数学法则。

综上所述，从音乐实践中发现十二律与七声音阶至迟在武王伐纣的时候，即公元前 11 世纪；从数学上以三分损益法完成五声音阶的计算至迟在春秋中叶(约公元前 572—前 542年)或管仲生活的年代(?—公元前 645 年)。这个结论是指下限时间，而其上限的历史

表 3　中国古代三分损益法的发展时间进程表

时　　间	内　　容	文 物 或 文 献
公元前第 60 世纪	出现六声或七声音阶	河南舞阳贾湖骨笛
	小三度音程等	西安半坡陶埙
公元前第 20 世纪	四声音列	甘肃玉门火烧沟陶埙
	绝对音高	山西夏县、襄汾石磬
公元前第 13 世纪	十一个半音与绝对音高	河南辉县琉璃阁殷埙
公元前第 13—前 12 世纪	十一个半音与七声音阶	河南小屯殷埙
公元前第 12—前 9 世纪	纯律小三度，自然泛音列，以及四声音列	殷钟，周编钟
公元前第 11 世纪（武王伐纣）	关于十二律与七声音阶的知识及其在音乐实践中的应用	《国语·周语》
公元前 572—前 542 年	与《管子·地员》记载相同的五声音阶，三分损益法已经诞生	山西侯马编钟
公元前 522—前 521 年	十二律音名、音高标准器"均钟木"以及"纪之以三"的文字记载	《国语·周语》
	律学实验的定性总结	《左传·昭公二十年》
公元前 433 年	乐律与声学的高度发达	曾侯乙编钟
公元前第 4—前 3 世纪	三分损益数学方法的详细文字记述	《管子·地员》
公元前第 2 世纪	对十二律完成数学计算的文字记述	《吕氏春秋·音律》

① 《左传·昭公二十年》："先王之济五味，和五声也，以平其心，成其政也。声亦如味。一气，二体，三类，四物，五声，六律，七音，八风，九歌，以相成也。清浊，小大，短长，疾徐，哀乐，刚柔，迟速，高下，出入，周疏，以相济也。君子听之，以平其心。……若琴瑟之专壹，谁能听之？……"十三经注疏本，下册，中华书局影印，1980 年版，第 2093—2094 页。

年代有待进一步研究。

为了简明起见，我们将中国古代有关律学和三分损益起源的事件列于表 3，以供读者参考。

THE ORIGIN OF THE TONING METHOD OF THE "ADDITION OR SUBTRACTION OF ONE-THIRD"

Dai Nianzu

Abstract

The toning method of the "addition or subtraction of one-third" is found in the Chapter on Di Yuan of *Guan Zi* (Book of Master Guan). For this reason, the origin of Chinese toning system has been commonly placed in about the 3rd o the 4th century B.C. or even later. Based on the musical cultural relics unearthed in China in recent years and the results of their frequency measurements, this paper begins with a discussion of the origin of Chinese toning system. It points out that the vertical bone flute of the 60th century B.C. excavated in Jiahu Village, Wuyang County has a six-note or seven-note scale, and that the twelve-note of fixed pitch and seven-note scale occurred in China in the 11th century B. C. at the latest. The result of frequency-measuring of Houma chime-bells shows that the mathematical method of calculating the five-note scale by the "addition or subtraction of one-third" (i.e., the up and down principle) came into existence in the middle (c 572—542 B.C.) of the Spring and Autumn Period at the latest or during Master Guan's time (?—645 B.C.).

Key words: The "Addition or Subtraction of One-Third", origin